

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2020年7月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则下列等式成立的是().

A. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

B. $|A+B| = |A| + |B|$

C. $|-2AB| = 2^n |A| |B|$

D. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. 乘积矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 中的元素 $c_{23} = ()$.

A. 1

B. -4

C. 7

D. 8

3. 设 X_1, X_2 为线性方程组 $AX = B$ 的两个解, 则下列向量中()一定是 $AX = B$ 的解.

A. $X_1 + X_2$

B. $X_1 - X_2$

C. $X_1 - 2X_2$

D. $2X_2 - X_1$

4. 掷两颗均匀的骰子, 事件“点数之和为3”的概率是().

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{11}$

5. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则()是 μ 的无偏估计.

A. $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3$

B. $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3$

C. $\frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3$

D. $x_1 + x_2 + x_3$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A, B 是 3 阶矩阵, 其中 $|A|=3, |B|=2$, 则 $|2A'B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 若 $P(A)=0.7, P(B)=0.8$, 且事件 A, B 相互独立, 则 $P(A\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的密度函数, 则对任意 $a < b$ 都有 $P(a < X < b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \sim \underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分, 共 64 分)

11. 已知 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 当 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = \lambda \end{cases}$$

有解, 在有解的情况下求方程组的全部解.

13. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A+B)$.

14. 据资料分析, 某厂生产的砖的抗断强度 X 服从正态分布 $N(32.5, 1.21)$. 今从该厂最近生产的一批砖中随机地抽取了 9 块, 测得抗断强度(单位: kg/cm^2) 的平均值为 31.18. 假设标准差没有改变, 在 0.05 的显著性水平下, 问这批砖的抗断强度是否合格. ($u_{0.975} = 1.96$)

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关.

试卷代号:1080

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准

(供参考)

2020年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. C 3. D 4. B 5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 12

7. 2

8. 0.14

9. $\int_a^b f(x) dx$

10. $N(\mu, \frac{4}{10})$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解: $X = (I - A)^{-1}B$, 5分

$$\text{其中 } I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

利用初等行变换得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{故 } (I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

由矩阵乘法得

$$X = (I-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

由此可知当 $\lambda \neq 5$ 时, 方程组无解. 当 $\lambda = 5$ 时, 方程组有解. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

此时方程组相应的齐次方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 是自由未知量})$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 及 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得齐次方程组的一个基础解系

$$X_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]' , X_2 = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 1]'$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 0$, 得非齐次方程组的一个特解

$$X_0 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]'$$

由此得原方程组的全部解为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad (\text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$13. \text{ 解: } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

14. 解: 零假设 $H_0: \mu = 32.5$; $H_1: \mu \neq 32.5$.

由于标准差没有改变, 故已知 $\sigma_0^2 = 1.21$, 选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由已知, $\bar{x} = 31.18$, $\mu_0 = 32.5$, $\sigma_0 = 1.1$, $n = 9$, 于是得

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{31.18 - 32.5}{1.1 / \sqrt{9}} = -3.6 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

在 0.05 的显著性水平下, $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right| = 3.6 > 1.96$, 因此拒绝零假设 H_0 , 即这批砖的抗断强度不合格. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

四、证明题(本题 6 分)

15. 设有一组数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$$

成立, 即 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$, 由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

成立, 由于该方程组只有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 是线性无关的. 证毕. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$