绝密 ★ 考试结束前

全国2020年10月高等教育自学考试

高等数学(工本)试题

课程代码:00023

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中,点$(2,-1,-9)$在

A. 第一卦限　　B. 第四卦限　　C. 第五卦限　　D. 第八卦限

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{\sin(3xy)}{y}$

A. 等于2　　B. 等于3　　C. 等于6　　D. 不存在

3. 已知$e^{x-y}dx-e^{x-y}dy$是某函数$u(x,y)$的全微分,则$u(x,y)=$

A. e^{x-y}　　B. $-e^{x-y}$　　C. e^{y-x}　　D. $-e^{y-x}$

4. 方程$\dfrac{dy}{dx}=y$的通解为

A. $y=e^{Cx}$　　B. $y=Ce^{x}$　　C. $y=C+e^{x}$　　D. $y=e^{C}+e^{x}$

5. 下列无穷级数中,条件收敛的无穷级数是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot5^{n}}{2^{n}}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cdot n}{n+1}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n}}$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{-1,1,0\}$，$\boldsymbol{\beta}=\{3,2,-1\}$，则 $2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=$____________.

7. 已知 $f(xy,x-y)=(x+y)^2$，则 $f(x,y)=$____________.

8. 设 $C:x+y=4\,(0\leqslant x\leqslant 4)$，则对弧长的曲线积分 $\int_C \sqrt{2}(x+y)\,\mathrm{d}s=$____________.

9. 微分方程 $y'=2x$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解 $y^*=$____________.

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，$f(x)$ 的傅里叶级数为 $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n}\sin nx$，

    则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_1=$____________.

三、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

11. 已知平面过点 $P_1(1,2,-1)$，$P_2(0,-3,1)$ 及 $P_3(3,2,0)$，求该平面方程.

12. 设函数 $z=x^3+\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

13. 设函数 $z=e^{2x+y}\cos(x-y)$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

14. 设方程 $z^x=y^z$，确定函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

15. 设函数 $f(x,y)=5-x^2-y^2$，求梯度 $\mathbf{grad}f(2,1)$.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_D 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1$.

17. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} 6x^2yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域 $\Omega:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 3$.

18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (x-2y)\,\mathrm{d}x$，其中 C 为从 $(-1,0)$ 沿 $y=1-x^2$ 到 $(1,0)$ 的弧段.

19. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

20. 求微分方程 $y''+y'=0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 的敛散性.

22. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4+x}$ 展开为 x 的幂级数.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 求函数 $f(x,y)=6y-6x-x^2-y^2+3$ 的极值.

24. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $P_0(-1,-1,2)$ 处的法线方程.

25. 用定义证明无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散.

公众号搜索：hifudao666，获取更多真题
公众号搜索：hifudao666，获取更多真题

绝密★启用前

2020年10月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。

1. D　　2. C　　3. A　　4. B　　5. A

二、填空题:本大题共5空,每空2分,共10分。

6. $\{-5,0,1\}$　　7. $4x+y^2$　　8. 32　　9. x^2　　10. 0

三、计算题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。

11. $\because\ \overrightarrow{P_1P_2}=\{-1,-5,2\},\ \overrightarrow{P_1P_3}=\{2,0,1\}$

$\therefore\ \boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$　　(3分)

则所求平面方程为 $-5(x-3)+5(y-2)+10z=0$

即 $x-y-2z-1=0$　　(2分)

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}$　　(3分)

$=3x^2+\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　(2分)

13. $\because\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2x+y}[2\cos(x-y)-\sin(x-y)]$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+y}[\cos(x-y)+\sin(x-y)]$　　(2分)

$\therefore\ dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$=e^{2x+y}[2\cos(x-y)-\sin(x-y)]dx+e^{2x+y}[\cos(x-y)+\sin(x-y)]dy$

(3分)

14. 设 $F(x,y,z)=z^x-y^z$，则

$F_x=z^x\cdot\ln z, F_z=xz^{x-1}-y^z\cdot\ln y$ （3 分）

从而 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z^x\cdot\ln z}{y^z\cdot\ln y-xz^{x-1}}$ （2 分）

15. $\because$ $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y$ （2 分）

$\therefore$ $\mathbf{grad}f(2,1)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\Big|_{(2,1)}$

$=-4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ （3 分）

16. 由 $D:x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1$ 可得

$\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2xy\mathrm{d}y$ （2 分）

$=\int_0^1[xy^2]_0^{1-x}\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{12}$ （3 分）

17. 由 $\Omega:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant2,0\leqslant z\leqslant3$，可得

$\iiint\limits_\Omega 6x^2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_0^3 z\mathrm{d}z$ （3 分）

$=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{2}\cdot\frac{3^2}{2}$

$=18$ （2 分）

18. $\because$ $C:y=1-x^2$，x 从 -1 到 1

$\therefore$ $\int_C(x-2y)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(x-2+2x^2)\mathrm{d}x$ （3 分）

$=2\int_0^1(2x^2-2)\mathrm{d}x$

$=-\frac{8}{3}$ （2 分）

19. 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

两端积分得 $\arctan y=\arctan x+C$ （3 分）

代入 $y(0)=1$，则 $C=\frac{\pi}{4}$，

从而所求特解为 $\arctan y=\arctan x+\frac{\pi}{4}$. （2 分）

20. 特征方程为 $r^2 + r = 0$

其根为 $r_1 = -1, r_2 = 0$ （3 分）

则所求通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2$ （2 分）

21. $\because$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n n!} = \dfrac{2n^n}{(n+1)^n}$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{2}{e}$ （3 分）

又 $\dfrac{2}{e} < 1$，由比值审敛法可知所给级数收敛. （2 分）

22. $\because$ $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$ （2 分）

$\therefore$ $\dfrac{1}{4+x} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{4^{n+1}}. \quad (-4 < x < 4)$ （3 分）

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 由 $\begin{cases} f_x(x,y) = -6 - 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 6 - 2y = 0 \end{cases}$ 可解得 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$ （2 分）

又 $f_{xx}(-3,3) = -2, f_{xy}(-3,3) = 0, f_{yy}(-3,3) = -2$

则由 $AC - B^2 > 0, A < 0$ 可知函数在 $(-3,3)$ 处有极大值 $f(-3,3) = 21$. （3 分）

24. 设 $F(x,y,z) = z - x^2 - y^2$，则

$\boldsymbol{n} = \{F_x, F_y, F_z\} = \{-2x, -2y, 1\}$

代入点 P_0，$\boldsymbol{n}\big|_{P_0} = \{2,2,1\}$ （3 分）

从而所求法线方程为 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ （2 分）

25. $\because$ $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$\therefore$ $S_n = 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]$

$= 2(\sqrt{n+1} - 1)$ （3 分）

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$

因此所给级数发散. （2 分）