D005·00023（通卡）

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学（工本）

（课程代码 00023）

（不允许使用计算器）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题3分，共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中，点$(-3,5,9)$在

A. 第一卦限　　B. 第二卦限　　C. 第三卦限　　D. 第四卦限

2. 函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处

A. 连续　　B. 间断　　C. 偏导数存在　　D. 可微

3. 设$f(x,y)$具有连续的偏导数，且$f(x,y)(xdx+ydy)$是某函数$u(x,y)$的全微分，则

A. $x\frac{\partial f}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial x}$　　B. $x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}$　　C. $x\frac{\partial f}{\partial y}=y\frac{\partial f}{\partial x}$　　D. $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$

4. 下列微分方程中，是可分离变量的微分方程为

A. $\frac{dy}{dx}=e^{xy}$　　B. $\frac{dy}{dx}=2xy$

C. $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$　　D. $\frac{dy}{dx}=x\sin(x+y)$

5. 幂级数$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots\quad(-1<x<1)$的和函数$S(x)$为

A. $\frac{x}{1+x}$　　B. $\frac{1}{1+x}$　　C. $\frac{x}{1-x}$　　D. $\frac{1}{1-x}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6. 设向量 $\alpha = \{2, -2, 1\}$，则向量 α 的模等于__________.

7. 极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} =$__________.

8. 设积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$__________.

9. 微分方程 $x^2 y'' + (1 - x^2)y' - y = 1$ 的特解 $y^* =$__________.

10. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，$f(x)$ 的傅里叶级数为 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 4}{n^2} \cos nx$，

则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_1 =$__________.

三、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

11. 求平面 $\pi: x - 2y - z + 4 = 0$ 和直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{2}$ 的夹角 φ.

12. 设函数 $z = \mathrm{e}^{2x-y}\cos(x+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

13. 设 $z = x^2 y + xy^2$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

14. 设方程 $x^2 + y = z^2$ 确定函数 $z = z(x, y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

15. 设 $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，求 $\mathbf{grad} f(1, -1, 1)$.

16. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sin(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 4$.

17. 计算对弧长的曲线积分 $\int_C (x^2 - y + 3)\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}s$，其中 $C: y = x^2 (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 一段弧.

18. 计算对坐标的曲线积分 $\int_C (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$，其中 C 是从点 $(1,0)$ 到点 $(2,0)$ 的直线段.

19. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$ 的通解.

20. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解.

21. 判断无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$的敛散性.

22. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^{n+1}}$的收敛半径和收敛区间.

四、综合题:本大题共3小题,每小题5分,共15分。

23. 求函数$f(x,y)=64x+32y-2x^2+4xy-4y^2-14$的极值点,并说明是极大值点还是极小值点.

24. 求曲面$x^2+2y^2+z^2=4$在点$P_0(1,1,1)$处的切平面方程.

25. 证明无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛.

绝密★启用前

2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

（课程代码　00023）

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

1. B　　2. A　　3. C　　4. B　　5. D

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6. 3　　7. 1　　8. 4π　　9. -1　　10. 4

三、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

11. 解：$\boldsymbol{n}=\{1,-2,-1\}$　　$\boldsymbol{s}=\{1,1,2\}$　　（2 分）

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{s}|}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad \varphi=\frac{\pi}{6}$　　（3 分）

12. 解：令 $u=2x-y, v=x+y$，则 $z=e^u\cdot\cos v$

$\because\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$　　（2 分）

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^u\cdot\cos v\cdot(-1)+e^u\cdot(-\sin v)\cdot 1$$

$$=-e^u\cdot(\cos v+\sin v)$$

$=-e^{2x-y}\cdot[\cos(x+y)+\sin(x+y)]$　　（3 分）

13. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy$　　（3 分）

$\therefore\quad dz=(2xy+y^2)dx+(x^2+2xy)dy$　　（2 分）

14. 解：令 $F(x,y,z)=x^z-z^y+9$

$F_y=-z^y\cdot\ln z$　　$F_z=x^z\cdot\ln x-yz^{y-1}$　　（2 分）

$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^y\cdot\ln z}{x^z\cdot\ln x-yz^{y-1}}$　　（3 分）

15. 解：$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$　$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$　$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$　(3 分)

$\therefore$ $\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(xi+yj+zk)$

$\therefore$ $\mathbf{grad}f(1,-1,1)=\frac{1}{3}i-\frac{1}{3}j+\frac{1}{3}k$　(2 分)

16. 解：在极坐标系中，区域 D 可表示为：$0\leq\rho\leq2,0\leq\theta\leq2\pi$

$\therefore$ $\iint_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sin(\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$　(2 分)

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sin(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$

$=\pi(1-\cos4)$　(3 分)

17. 解：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

$\therefore$ $\int_C(x^2-y+3)\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}s=\int_{-1}^{1}(x^2-x^2+3)(1+4x^2)\mathrm{d}x$　(3 分)

$=6\int_0^1(1+4x^2)\mathrm{d}x$

$=14$　(2 分)

18. 解：C 的方程为 $y=0$，x 从 1 变到 2.

$\therefore$ $\int_C(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_1^2(x+0)\mathrm{d}x$　(3 分)

$=\frac{3}{2}$　(2 分)

19. 解：微分方程可化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x$.

所以通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left[\int x\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$=\mathrm{e}^{x}\left[\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$　(3 分)

$=\mathrm{e}^{x}[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C]$

$=C\mathrm{e}^{x}-x-1$　(2 分)

20. 解：特征方程为 $r^2-5r+6=0$，特征根 $r_1=2,r_2=3$.　(2 分)

方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$　(3 分)

21. 解：$u_n=\dfrac{5^n\cdot n!}{n^n}$　　$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=5\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

$\because$　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{5}{e}>1$　　(3 分)

$\therefore$　由比值审敛法知，该级数发散.　　(2 分)

22. 解：$a_n=\dfrac{1}{n^2\cdot 2^{n+1}}$

$\because$　$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2(n+1)^2}=\dfrac{1}{2}$　　(2 分)

$\therefore$　收敛半径 $R=2$，收敛区间为 $(-2,2)$　　(3 分)

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 解：令 $\begin{cases}f_x(x,y)=64-4x+4y=0\\ f_y(x,y)=32+4x-8y=0\end{cases}$

解得驻点 $(40,24)$　　(2 分)

又因为 $A=f_{xx}=-4$，$B=f_{xy}=4$，$C=f_{yy}=-8$

且 $B^2-AC=-16<0$，所以 $(40,24)$ 是极值点.

又 $A=-4<0$，从而 $(40,24)$ 是极大值点.　　(3 分)

24. 解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4$

$F_x=2x$，$F_y=4y$，$F_z=2z$

且在 $P_0(1,1,1)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,4,2\}$　　(3 分)

切平面方程为：$2(x-1)+4(y-1)+2(z-1)=0$

即：$x+2y+z-4=0$　　(2 分)

25. 证明：令 $u_n=\dfrac{1}{n}$，则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

满足条件 (1) $u_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$　　(3 分)

$\therefore$　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.　　(2 分)