

全国 2020 年 8 月高等教育自学考试  
**高等数学(工本)试题**  
 课程代码:00023

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

**选择题部分**

**注意事项:**

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称,姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

**一、单项选择题:本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。**

1. 在空间直角坐标系中,点  $(-2, 0, 19)$  在
  - A.  $oxy$  平面上
  - B.  $oxz$  平面上
  - C.  $oyz$  平面上
  - D.  $y$  轴上
2. 函数  $f(x, y) = |x| + |y|$ , 在点  $(0, 0)$  处
  - A. 连续
  - B. 间断
  - C. 偏导数存在
  - D. 可微
3. 设  $f(x)$  具有连续的一阶导数且  $3x^2y^2dx + yf(x)dy$  是某函数  $u(x, y)$  的全微分,则
  - A.  $f(x) = 3x^2$
  - B.  $f(x) = 6x^2$
  - C.  $f(x) = 2x^3$
  - D.  $f(x) = 6x^3$
4. 以  $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$  为通解的微分方程是
  - A.  $y'' + 3y' + 2y = 0$
  - B.  $y'' - 3y' + 2y = 0$
  - C.  $y'' + 3y' + 2 = 0$
  - D.  $y'' - 3y' + 2 = 0$
5. 下列无穷级数中,发散的无穷级数是
  - A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
  - B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$
  - C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
  - D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

## 非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 5 空，每空 2 分，共 10 分。

6. 设向量  $\alpha = \{4, -2, 6\}$ ,  $\beta = \{1, 1, -1\}$ , 则  $\alpha + 2\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设  $C: x + y = 1 (0 \leq x \leq 1)$ , 则对弧长的曲线积分  $\int_C \sqrt{2} ds = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 微分方程  $y'' + 9y = 18$  的特解  $y^* = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 设函数  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数,  $f(x)$  的傅里叶级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx + \frac{4}{n} \sin nx \right)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶系数  $b_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

三、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

11. 已知直线  $L$  过点  $P(-1, -1, 2)$ , 并且与平面  $\pi: 2x - y + z = 0$  垂直, 求直线  $L$  的方程.

12. 设函数  $z = e^{x+y} \sin(x - 2y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

13. 设函数  $z = x^3y + xy^3$ , 求全微分  $dz$ .

14. 设方程  $xyz - \ln z = 0$  确定函数  $z = z(x, y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

15. 设函数  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 求  $f(x, y)$  在点  $(1, 2)$  处的梯度  $\text{grad } f(1, 2)$ .

16. 计算二重积分  $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$ , 其中积分区域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

17. 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x + 3y + 3z) dx dy dz$ , 其中积分区域  $\Omega: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$ .

18. 计算对坐标的曲线积分  $\int_C (x - 2y) dx + (2x - y) dy$ , 其中  $C$  是由点  $(-1, 3)$  沿直线  $2x + y = 1$  到点  $(0, 1)$  的直线段.

19. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{1+2y}$  满足  $y(0) = 1$  的特解.

20. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$  的通解.

21. 判断无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 5^n}$  的敛散性.

22. 将函数  $f(x) = \frac{1}{3+x}$  展开为  $x$  的幂级数，并写出收敛区间.

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 求函数  $f(x, y) = 7 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2$  的极值.

24. 求曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  在  $t = 1$  对应点处的法平面方程.

25. 用定义证明无穷级数  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$  收敛，并且收敛于 1.

2020 年 8 月高等教育自学考试全国统一命题考试  
**高等数学(工本)试题答案及评分参考**  
 (课程代码 00023)

**一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。**

1. B      2. A      3. C      4. B      5. D

**二、填空题: 本大题共 5 空, 每空 2 分, 共 10 分。**

6.  $|6, 0, 4|$       7. 0      8. 2      9. 2      10. 4

**三、计算题: 本大题共 12 小题, 每题 5 分, 共 60 分。**

11.  $\because$  直线  $L$  与平面  $\pi$  垂直,  
 $\therefore$  方向向量  $S = \{2, -1, 1\}$  (2 分)

又直线过点  $P(-1, -1, 2)$ ,

则直线  $L$  的方程为  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$  (3 分)

12.  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} \sin(x-2y) + e^{x+y} \cos(x-2y)$  (3 分)  
 $= e^{x+y} [\sin(x-2y) + \cos(x-2y)]$  (2 分)

13.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^3$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 3xy^2$  (2 分)

$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy$  (3 分)

14. 设  $F(x, y, z) = xyz - \ln z$ , 则

$$F_y = xz, F_z = xy - \frac{1}{z}. \quad (3 \text{ 分})$$

从而  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{xz}{xy - \frac{1}{z}} = -\frac{xz^2}{xyz - 1}$  (2 分)

15.  $\because \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  (2 分)

$$\therefore \text{grad}f(1,2) = \left. \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right|_{(1,2)} \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j}$$
 (3 分)

16. 在极坐标系中,  $D: 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$\iint_D (x^2 + y^2)^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^4 \rho d\rho \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho \\ = 2\pi \cdot \frac{1}{6} \rho^6 \Big|_0^1 \\ = \frac{\pi}{3}$$
 (2 分)

17. 积分区域  $\Omega: 0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$  可得:

$$\iiint_{\Omega} (x + 3y + 3z) dxdydz \\ = \int_0^2 dx \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 (x + 3y + 3z) dz \\ = \int_0^2 dx \int_{-2}^2 2(x + 3y) dy \\ = \int_0^2 8x dx = 16$$
 (3 分)

18.  $\because C: y = 1 - 2x, x$  从  $-1$  变到  $0$ ,

$$\therefore \int_C (x - 2y) dx + (2x - y) dy \\ = \int_{-1}^0 [(x - 2 + 4x) + (2x - 1 + 2x) \cdot (-2)] dx \\ = \int_{-1}^0 (-3x) dx \\ = \frac{3}{2}$$
 (2 分)

19. 分离变量得  $(1 + 2y)dy = (1 + 2x)dx$

两端积分得  $y + y^2 = x + x^2 + C$  (3分)

代入  $y(0) = 1$  得  $C = 2$

则所求特解为  $y + y^2 = x^2 + x + 2$  (2分)

20.  $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = 3x$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int 3x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left( \int 3x \cdot x dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (x^3 + C)$$

21.  $\because \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 5^n} \cdot \frac{n^2 \cdot 5^n}{2^n} = \frac{2n^2}{5(n+1)^2}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{5(n+1)^2} = \frac{2}{5}$$

又  $\frac{2}{5} < 1$ , 由比值审敛法可知所给级数收敛。 (2分)

22.  $\because \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$  (2分)

$$\therefore \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}} \quad (-3 < x < 3) \quad (3分)$$

四、综合题:本大题共3小题,每小题5分,共15分。

23. 由  $\begin{cases} f_x(x, y) = 14 - 8y - 4x = 0 \\ f_y(x, y) = 32 - 8x - 20y = 0 \end{cases}$  可解得  $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$  (2分)

又  $A = f_{xx}(\frac{3}{2}, 1) = -4, B = f_{xy}(\frac{3}{2}, 1) = -8, C = f_{yy}(\frac{3}{2}, 1) = -20$

则  $AC - B^2 > 0$ , 且  $A < 0$ , 所以函数在  $(\frac{3}{2}, 1)$  处有极大值  $f(\frac{3}{2}, 1) = \frac{67}{2}$  (3分)

$$24. \because x'_i = 1, y'_i = 2t, z'_i = 3t^2$$

$$\therefore t=1 \text{ 时}, T = \{1, 2, 3\} \quad (3 \text{ 分})$$

又  $t=1$  对应点为  $(1, 1, 1)$ , 则所求法平面方程为

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

$$\text{即 } x + 2y + 3z = 6 \quad (2 \text{ 分})$$

$$25. \because u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \quad (2 \text{ 分})$$

则由定义可知该级数收敛, 且收敛于 1.