D005·00023(通卡)

绝密★启用前

2019年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)

(课程代码　00023)

(不允许使用计算器)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 在空间直角坐标系中,点$(2,-1,-6)$关于原点的对称点的坐标是

A. $(-2,-1,-6)$　　B. $(-2,1,6)$

C. $(-2,-1,6)$　　D. $(-2,1,-6)$

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to3\\y\to0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$

A. 等于0　　B. 等于1　　C. 等于3　　D. 不存在

3. 设积分区域$D:x^2+(y-1)^2\le1$,二重积分$\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$化为极坐标下的二次积分为

A. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r^2)\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r^2)r\mathrm{d}r$

C. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2)r\mathrm{d}r$

4. 以$y=\cos4x$为特解的微分方程是

A. $y''+16y=0$　　B. $y''-16y=0$

C. $y''+16y'=0$　　D. $y''-16y'=0$

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-2)^n$的收敛域是

A. $(-2,2)$　　B. $[-2,2]$

C. $(0,4)$　　D. $[0,4]$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共5空，每空2分，共10分。

6. 已知向量$\alpha=\{2,a,-3\}$，$\beta=\{1,-1,-1\}$，且$\alpha\cdot\beta=0$，则常数$a=$______.

7. 已知函数$z=x^2y$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$______.

8. 二次积分$\int_0^1 dx\int_{-1}^1 xy^2 dy$的值是______.

9. 微分方程$ydx+xdy=0$的通解是______.

10. 无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$的和$s=$______.

三、计算题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

11. 已知平面π经过点$P_0(-1,1,2)$，并且与平面$2x-3y+6z-3=0$平行，求平面π的方程.

12. 已知函数$u=f(x\ln y,y^2\ln x)$，其中f为可微函数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$.

13. 求曲线$x=t+\sin t,y=t+\cos t,z=2t+3$，在对应于$t=0$的点处的切线方程.

14. 向在空间的哪些点上，函数$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$的梯度平行于x轴.

15. 计算二重积分$\iint\limits_D(1+y)d\sigma$，其中积分区域$D:x^2+y^2\leq 1$.

16. 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)dv$，其中积分区域$\Omega:x^2+y^2+z^2\leq 3$.

17. 计算对弧长的曲线积分$\int_C y^2 ds$，其中C是曲线$x=\sqrt{1-y^2}$.

18. 计算对面积的曲面积分$\iint\limits_\Sigma(1+x+\frac{1}{2}y+z)dS$，其中$\Sigma$是平面$2x+y+2z-1=0$在第一卦限中的部分.

19. 求微分方程$x\frac{dy}{dx}+y=xe^x$的通解.

20. 求微分方程 $y'' + y' - 12y = 0$ 的通解.

21. 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{8n}{5}$ 是否收敛,如果收敛,是绝对收敛还是条件收敛?

22. 已知周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

$S(x)$ 是 $f(x)$ 傅里叶级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 的和函数,求 $S(3\pi)$.

四、综合题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

23. 用钢板造一个表面积为 $27m^2$ 的长方体容器,应如何选择容器尺寸才可使容器的容积最大? 并求最大容积.

24. 验证 $xy^2 dx + x^2 y dy$ 在整个 Oxy 平面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求这样的一个 $u(x,y)$.

25. 将函数 $f(x) = e^{2x}$ 展开为 x 的幂级数.

公众号搜索：hifudao666，获取更多真题
公众号搜索：hifudao666，获取更多真题

绝密★启用前

2019年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(工本)试题答案及评分参考

(课程代码 00023)

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题3分,共15分。

1. B　　2. C　　3. D　　4. A　　5. C

二、填空题:本大题共5空,每空2分,共10分。

6. 5　　7. $2y$　　8. $\frac{1}{3}$　　9. $xy=C$　　10. $\frac{1}{4}$

三、计算题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。

11. 解:平面法向量 $n=\{2,-3,6\}$ (2分)

所以所求平面方程为 $2(x+1)-3(y-1)+6(z-2)=0$

即 $2x-3y+6z-7=0$ (3分)

12. 解:设 $u=f(v,w)$,其中 $v=x\ln y, w=y^2\ln x$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\ln y.f_v+\frac{y^2}{x}f_w$ (3分)

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}f_v+2y\ln xf_w$ (2分)

13. 解:因为 $x'=1+\cos t, y'=1-\sin t, z'=2$.

所以在 $t=0$ 对应点处切线方向向量为 $\{2,1,2\}$ (2分)

又 $t=0$ 对应点的坐标为 $(0,1,3)$,所以所求切线方程为

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$$ (3分)

14. 解:x 轴单位向量是 $\{1,0,0\}$,函数 u 在 (x,y,z) 点的梯度为

$\mathrm{grad}u=\{3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy\}$ (2分)

由题意 $\mathrm{grad}u$ 与 $\{1,0,0\}$ 平行,满足 $\begin{cases}3y^2-3xz=0\\3z^2-3xy=0\end{cases}$

即曲线 $\begin{cases}y^2=xz\\z^2=xy\end{cases}$ 上的点均是所求点. (3分)

15. 解：因为积分区域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 关于 $y=0$ 对称，所以

$$\iint\limits_D(1+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma \qquad (2\text{ 分})$$

$$=\pi \qquad (3\text{ 分})$$

16. 解：$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}}r^4\mathrm{d}r$ （2 分）

$$=2\pi\cdot(-\cos\varphi)\big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{5}r^5\big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{36\sqrt{3}\pi}{5} \qquad (3\text{ 分})$$

17. 解：$\int_C y^2\mathrm{d}s=\int_{-1}^{1}y^2\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}+1}\,\mathrm{d}y$ （2 分）

$$=2\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{y=\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2} \qquad (3\text{ 分})$$

18. 解：$\Sigma: z=\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}y$，在 Oxy 面上投影 $D_{xy}:0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 1-2x$

则 $\iint\limits_\Sigma(1+x+\frac{1}{2}y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma(1+\frac{1}{2})\mathrm{d}S$ （2 分）

$$=\frac{3}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{4}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{9}{16} \qquad (3\text{ 分})$$

19. 解：微分方程可化为：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=e^x$

通解 $y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}[\int e^xe^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$ （2 分）

$$=\frac{1}{x}(\int xe^x\mathrm{d}x+C)$$

$$=\frac{1}{x}(xe^x-e^x+C) \qquad (3\text{ 分})$$

20. 解：∵ 微分方程的特征方程为 $r^2 + r - 12 = 0$

特征根为 $r_1 = -4, r_2 = 3$ (2 分)

∴ 通解为：$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$ (3 分)

21. 解：一般项为 $u_n = \frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}$，而 $\left|\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}\right| \le \frac{1}{n^3}$ (2 分)

∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}\right|$ 收敛.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{8n}{5}$ 收敛，且为绝对收敛. (3 分)

22. 解：因为 $x = 3\pi$ 是 $f(x)$ 的间断点，所以 $S(3\pi) = S(\pi)$ (2 分)

$= \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

$= \frac{(-\pi)^2+1+0}{2} = \frac{1+\pi^2}{2}$ (3 分)

四、综合题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

23. 解：设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z（单位：m），则

$2xy + 2yz + 2xz = 27$，容积为 $V = xyz$.

设 $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - \frac{27}{2})$ (2 分)

$$令\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + xz = \frac{27}{2} \end{cases}$$

解得 $x = y = z = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，由于 $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ 是唯一驻点，

所以当长、宽、高均为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，容器的容积最大，最大容积为 $V = \frac{27\sqrt{2}}{4}m^3$. (3 分)

24. 解：$P(x,y) = xy^2, Q(x,y) = x^2y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$

∵ 在整个 Oxy 平面内，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

∴ $xy^2dx + x^2ydy$ 在整个 Oxy 平面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分. （2分）

且可取 $u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$

$$=\int_0^y x^2y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}x^2y^2$$ （3分）

25. 解：∵ $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

∴ $f(x)=e^{2x}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\quad(-\infty<2x<+\infty)$$ （2分）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$ （3分）

公众号搜索：hifudao666，获取更多真题
公众号搜索：hifudao666，获取更多真题