

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

## 高等数学(工专)

(课程代码 00022)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

## 第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 下列函数中,周期为 $\pi$ 的函数是

A.  $y = \sin x$

B.  $y = \sin \frac{x}{2}$

C.  $y = \arctan 2x$

D.  $y = \tan(x + 1)$

2. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} =$

A.  $-\infty$

B. 0

C.  $e^{-1}$

D.  $\infty$

3. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  的敛散情况是

A. 发散

B. 收敛于0

C. 收敛于e

D. 收敛于1

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

A.  $2 \int_{-1}^0 x dx$

B.  $2 \int_0^1 x^2 dx$

C.  $\int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 x dx$

D.  $\int_0^1 x dx + \int_{-1}^0 x^2 dx$

5. 设A为三阶方阵,A的转置矩阵记为 $A'$ ,下面选项中正确的选项是

A.  $|A'| = |A|^{-1}$

B.  $|A'| = |A|$

C.  $|A'| \neq |A|$

D.  $|A'| = |-A|$

## 第二部分 非选择题

二、填空题:本大题共8空,每空4分,共32分。

6. 已知  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

7. 极限  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x^2 - 256}{x + 10} =$  \_\_\_\_\_.

8. 设  $f(x)$  是可导函数,  $y = e^{2x} + f^2(x)$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

9. 已知  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(\Delta x)}{\Delta x} = 1$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

10.  $\int_{-2}^2 (x^3 + |x|) dx =$  \_\_\_\_\_.

11. 曲线  $y = x^2$  及  $y^2 = x$  所围的平面图形的面积为 \_\_\_\_\_.

12. 行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , 则矩阵  $X =$  \_\_\_\_\_.

三、计算题:本大题共7小题,每小题6分,共42分。

14. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{x^2}$ .

15. 设  $y = x^2 + 2^x + \ln 5$ , 求  $y'|_{x=0}$ .

16. 在曲线  $y = x \ln x + 1$  上求一点, 使该点的切线与直线  $y = 2x + 3$  平行.

17. 求不定积分  $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$ .

18. 确定函数  $y = e^x - e^{-x} - 1$  的单调区间.

19. 计算定积分  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ .

20. 如果方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

仅有零解,  $\lambda$  应取何值?

四、综合题：本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分。

21. 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ，试问当常数  $a, b$  满足什么关系时， $f(x)$  一定没有极值，可能有一个极值，可能有两个极值？

22. 求由  $y = x^2$  及  $y = 1$  所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周而成的旋转体的体积。

公众号搜索：hifudao666,  获取更多真题

公众号搜索：hifudao666,  获取更多真题

公众号搜索：hifudao666,  获取更多真题

# 2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学(工专)试题答案及评分参考

(课程代码 00022)

一、单项选择题:本大题共5小题,每小题2分,共10分。

1. D      2. B      3. A      4. C      5. B

二、填空题:本大题共8空,每空4分,共32分。

6.  $(1+x)^2$       7. 0      8.  $2e^{2x} + 2f(x)f'(x)$       9. -1

10. 4

11.  $\frac{1}{3}$

12. 20

13.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

三、计算题:本大题共7小题,每小题6分,共42分。

14. 解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^{2x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + e^{2x}}{2x}$  (2分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^{2x}}{2} \quad (2分)$$

$$= 1 \quad (2分)$$

15. 解:  $y' = 2x + 2^x \ln 2 + 0$  (4分)

$$= 2x + 2^x \ln 2,$$

$$y'|_{x=0} = 2 \times 0 + 2^0 \ln 2 = \ln 2. \quad (2分)$$

16. 解:  $y' = \ln x + 1$  (2分)

设所求点为  $(x_0, y_0)$ , 由导数的几何意义知, 切线斜率  $k = \ln x_0 + 1$ ,

依题意  $\ln x_0 + 1 = 2$ , 解得  $x_0 = e$ . (2分)

将  $x_0 = e$  代入  $y = x \ln x + 1$ , 可得  $y_0 = e + 1$ ,

故曲线上点  $(e, e + 1)$  处的切线与直线  $y = 2x + 3$  平行. (2分)

17. 解:  $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$  (3分)

$$= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C. \quad (3分)$$

18. 解: 函数  $y = e^x - e^{-x} - 1$  为定义在  $(-\infty, +\infty)$  内的可导函数, 并且

$$y' = e^x - e^{-x}(-1) = e^x + e^{-x}, \quad (2 \text{ 分})$$

由于  $y' = e^x + e^{-x} > 0$ , (2 分)

因此函数  $y = e^x - e^{-x} - 1$  在其定义域  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加. (2 分)

19. 解:  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \stackrel{\text{令 } \sqrt{x}=t}{=} \int_0^1 2te^t dt$

$$= 2 \int_0^1 te^t dt \quad (3 \text{ 分})$$

$$= 2(te^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt)$$

$$= 2(e - e^t \Big|_0^1) = 2. \quad (3 \text{ 分})$$

20. 解: 齐次线性方程组仅有零解的充分必要条件是系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{而 } D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

故  $(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0$ , 即  $\lambda \neq -2, \lambda \neq 1$  时, 方程组仅有零解. (3 分)

四、综合题: 本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分。

21. 解: 函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  在其定义域  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 并且

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad (2 \text{ 分})$$

令  $f'(x) = 0$ ,

当  $\Delta = 4a^2 - 12b < 0$ , 即  $a^2 - 3b < 0$  时, 方程  $f'(x) = 0$  没有根, 函数  $f(x)$  没有驻点;

当  $\Delta = 4a^2 - 12b = 0$ , 即  $a^2 - 3b = 0$  时, 方程  $f'(x) = 0$  有一个根, 函数  $f(x)$  有一个驻点;

当  $\Delta = 4a^2 - 12b > 0$ , 即  $a^2 - 3b > 0$  时, 方程  $f'(x) = 0$  有两个根, 函数  $f(x)$  有两个驻点; (2 分)

因为可导函数的极值点一定是驻点, (2 分)

所以当  $a^2 - 3b < 0$  时,  $f(x)$  一定没有极值; 当  $a^2 - 3b = 0$  时,  $f(x)$  可能有一个极值; 当  $a^2 - 3b > 0$  时,  $f(x)$  可能有两个极值. (2 分)