

D003 · 00020(通卡)

绝密★启用前

2020年8月高等教育自学考试全国统一命题考试

高等数学(一)

(课程代码 00020)

(不允许使用计算器)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 下列对数运算正确的是
A. $\ln 12 + \ln 4 = \ln 16$ B. $\ln 12 - \ln 4 = \ln 3$
C. $\ln 12 \times \ln 4 = \ln 48$ D. $\frac{\ln 12}{\ln 4} = \ln 3$
2. 下列函数中,在 $(0, +\infty)$ 内单调增加的是
A. $y = \sin x$ B. $y = 2\ln x$ C. $y = 3 - 5x^2$ D. $y = 10^{-x}$
3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+3x)^{\frac{1}{2}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $k =$
A. 1 B. e C. e^2 D. e^3
4. 函数 $y = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ 间断点的个数是
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
5. 曲线 $y = \frac{2x^2}{x^3-1}$ 的铅直渐近线为
A. $x=0$ B. $x=1$ C. $y=0$ D. $y=1$

6. 设函数 $f(x) = x \cos 2x$, 则 $f'(x) =$
- A. $\cos 2x - 2x \sin 2x$ B. $\cos 2x + 2x \sin 2x$
 C. $\cos 2x - x \sin 2x$ D. $\cos 2x + x \sin 2x$
7. 设函数 $y = \sqrt{1+x^2}$, 则微分 $dy =$
- A. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ C. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ D. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
8. 若函数 $f(x)$ 有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则该函数在点 x_0 处
- A. 一定有极大值 B. 一定有极小值
 C. 一定有极值 D. 一定没有极值
9. 对于区间 $[a, b]$ 上给定的连续函数 $f(x)$, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是
- A. $f(x)$ 的一个原函数 B. $f(x)$ 的全体原函数
 C. 确定的常数 D. 任意的常数
10. 设函数 $z(x, y) = \frac{x}{y}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$
- A. $dx - dy$ B. $dx + dy$ C. $dx - 2dy$ D. $dx + 2dy$

第二部分 非选择题

二、简单计算题：本大题共5小题，每小题4分，共20分。

11. 求函数 $y = \sqrt{x-2} + \ln(5-x)$ 的定义域.
12. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin a(x-1)}{x^2-1} = 1$, 求常数 a .
13. 求曲线 $y = x^3 + 12x + 1$ 的凹凸区间与拐点.
14. 求曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程.
15. 求不定积分 $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x} dx$.

三、计算题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

16. 确定常数 a 的值, 使得 $x \rightarrow 0$ 时, $x \ln(ax+1)$ 与 x^2 是等价无穷小量.
17. 设函数 $y = \arctan \frac{1}{x}$, 求二阶导数 y'' .
18. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 3$ 的特解.
19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \cos x}{\sin x}$.
20. 计算定积分 $I = \int_0^9 \frac{1}{1+2\sqrt{x}} dx$.

四、综合题：本大题共4小题，共25分。

21. (本小题6分)

设某产品的成本函数为 $C(q) = 4q^2 + 10q + 10$ (万元), 需求量为 $q = \frac{52-p}{3}$ (吨), p

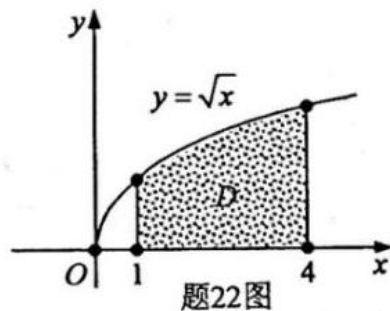
为价格 (万元/吨), 假设产销平衡. 问该产品的产量为多少时利润最大? 最大利润是多少?

22. (本小题6分)

设由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x=1$, $x=4$ 及 $y=0$

围成的平面图形为 D , 如图所示. 求:

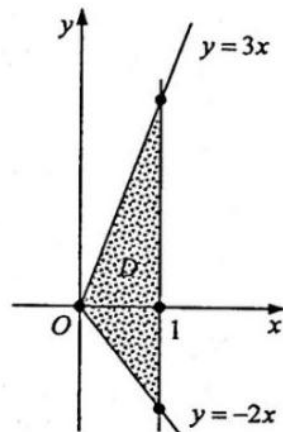
- (1) D 的面积 A ;
- (2) D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x .



题22图

23. (本小题 6 分)

计算二重积分 $I = \iint_D x^2 y dx dy$, 其中积分区域 D 由直线 $x=1, y=-2x, y=3x$ 围成, 如图所示.



题23图

24. (本小题 7 分)

求函数 $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9$ 的极值.

2020年8月高等教育自学考试全国统一命题考试
高等数学（一）试题答案及评分参考

（课程代码 00020）

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题3分，共30分。

1. B 2. B 3. D 4. C 5. B
6. A 7. D 8. C 9. C 10. A

二、简单计算题：本大题共5小题，每小题4分，共20分。

11. 解：要使函数有定义，必须 $x-2 \geq 0$ 且 $5-x > 0$ ，……2分
即 $2 \leq x < 5$ ，所以，函数的定义域为 $[2, 5)$ 。……4分

12. 解：因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin a(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{x+1} \cdot \frac{\sin a(x-1)}{a(x-1)} = \frac{a}{2} = 1$ ，……3分
所以 $a = 2$ 。……4分

13. 解：因为 $y' = 3x^2 + 12$ ， $y'' = 6x$ ，令 $y'' = 0$ ，得 $x = 0$ 。……2分
当 $x < 0$ 时， $y'' < 0$ ；当 $x > 0$ 时， $y'' > 0$ ，
则曲线的凸区间为 $(-\infty, 0)$ ，凹区间为 $(0, +\infty)$ ，拐点为 $(0, 1)$ 。
(注：凹凸区间可包含端点)。……4分

14. 解：切线斜率为 $y'|_{x=1} = 3$ ，……2分
所求切线方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$ ，即 $y = 3x - 1$ 。……4分

15. 解：原积分 $= \int x dx + \int 2 dx - \int \frac{1}{x} dx$ ……2分
 $= \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x| + C$ 。……4分

三、计算题：本大题共5小题，每小题5分，共25分。

16. 解：因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(ax+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = a$ ……3分
所以 $a = 1$ 。……5分

17. 解: 因 $y' = -\frac{1}{1+x^2}$,2分

故 $y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$5分

18. 解: 分离变量, 得 $y^2 dy = -2x dx$,2分

两边积分, 得 $\frac{1}{3}y^3 = -x^2 + C$,4分

代入初始条件, 得 $C = 10$, 故特解为 $3x^2 + y^3 = 30$5分

19. 解: 由洛必达法则, 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + \sin x}{\cos x}$ 3分

$= \ln 2$5分

20. 解: 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $I = \int_0^3 \frac{2t}{1+2t} dt$ 2分

$= \int_0^3 \frac{2t+1-1}{1+2t} dt = 3 - \frac{1}{2} \ln(1+2t) \Big|_0^3$ 4分

$= 3 - \frac{1}{2} \ln 7$5分

四、综合题: 本大题共 4 小题, 共 25 分。

21. (本小题 6 分)

解: 由题意 $p = 52 - 3q$, 得收益函数 $R(q) = pq = 52q - 3q^2$,

则利润函数为 $L(q) = R(q) - C(q) = -7q^2 + 42q - 10$3分

令 $L'(q) = -14q + 42 = 0$, 得唯一驻点 $q = 3$5分

又 $L''(3) = -14 < 0$, 所以 $q = 3$ 是极大值点, 即为最大值点.

故当产量 $q = 3$ (吨) 时利润最大, 最大利润为 $L(3) = 53$ (万元).6分

(注: 若用“由问题的实际意义知最值存在且驻点唯一”论述最值亦可)

22. (本小题 6 分)

解: (1) $A = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \frac{14}{3}$,3分

(2) $V_x = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{15}{2} \pi$6分

23. (本小题 6 分)

解: $I = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_{-2x}^{3x} x^2 y dy$ 3 分

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 5x^4 dx = \frac{1}{2}. \quad \text{.....6 分}$$

24. (本小题 7 分)

解: 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 4 = 0$, 得驻点 $(-1, 2)$2 分

$$\text{又 } A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(-1, 2)} = 2, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(-1, 2)} = 0, \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(-1, 2)} = 2. \quad \text{.....5 分}$$

因 $B^2 - AC = -4 < 0$, $A > 0$, 故 $z(-1, 2) = 4$ 是函数的极小值.7 分