

绝密 ★ 考试结束前

全国 2020 年 10 月高等教育自学考试

高等数学(一)试题

课程代码:00020

1. 请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。
2. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

选择题部分

注意事项:

每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. 方程 $x^3 - 4x = 0$ 的实根个数为

- A. 1 B. 2 C. 3

D. 4

2. 函数 $f(x) = (2 + \cos x)(1 + x^2)$

- A. 是奇函数 B. 是偶函数
C. 是奇函数也是偶函数 D. 是非奇非偶函数

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量为无穷小量的是

- A. $x^2 \sin \frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x} \sin x$ C. e^{-x} D. $\sqrt{1-x^3}$

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 4x - 1}{5x^6 + 2x^3 + 1} =$

- A. 0 B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{5}{3}$ D. ∞

5. 设函数 $y = (3x+2)^5$, 则导数 $\frac{dy}{dx} =$

- A. $3(3x+2)^4$ B. $5(3x+2)^4$
C. $15(3x+2)^4$ D. $(3x+2)^4$

6. 函数 $f(x) = (x+1)^3$ 在区间 $(-1, 2)$ 内
A. 单调增加 B. 单调减少 C. 不增不减 D. 有增有减
7. 曲线 $y = 2 + 3x^2 - x^3$ 的拐点为
A. $(1, 6)$ B. $(-1, 6)$ C. $(-1, 4)$ D. $(1, 4)$
8. 不定积分 $\int d \arcsin x =$
A. $\arcsin x$ B. $\arcsin x + C$
C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$
9. 下列定积分值等于零的是
A. $\int_{-1}^1 x^2 dx$ B. $\int_{-1}^1 x^2 \cos x dx$
C. $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx$ D. $\int_{-1}^1 x \sin x dx$
10. 设函数 $z = x^2 y$, 则全微分 $dz|_{(1,2)} =$
A. $dx + dy$ B. $2dx + dy$ C. $dx + 2dy$ D. $4dx + dy$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、简单计算题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. 求函数 $f(x) = \sqrt{x+1} - x \ln(1-x)$ 的定义域。

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{-\frac{1}{x}}$.

13. 设函数 $y = x^3 \tan x$, 求微分 dy .

14. 求曲线 $y = x^2 + 2x + 3$ 平行于直线 $y = 4x + 1$ 的切线方程.

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(x-1)}$.

三、计算题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

16. 求常数 a 的值使函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+a, & x \geq 2 \\ \frac{\sin(x-2)}{x-2}, & x < 2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续.

17. 设函数 $y = f(e^x + x^2)$, 且 $f(x)$ 可导, 求导数 $\frac{dy}{dx}$.

18. 求函数 $f(x) = 2x^2 - x^4$ 的极值.

19. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 4x y^2$ 的通解.

20. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $yz^2 - xz^3 = 1$ 确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

四、综合题：本大题共 4 小题，共 25 分。

21. (本小题 6 分)

设某产品的需求数量为 $Q = \frac{10-p}{3}$ (吨), 其中 p 为价格(万元/吨). 平均成本为 $\bar{C} = Q$

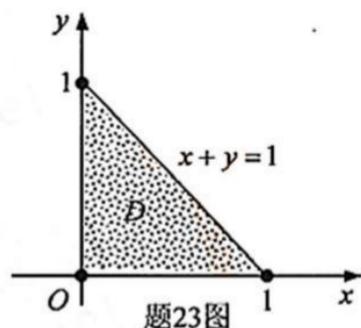
(万元/吨), 假设产销平衡. 问需求数量为多少时利润最大? 并求最大利润.

22. (本小题 6 分)

计算定积分 $I = \int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx$.

23. (本小题 6 分)

计算二重积分 $I = \iint_D (x + 2y) dxdy$, 其中 D 是由直线 $x + y = 1$ 与 $x = 0, y = 0$ 所围成的平面区域, 如图所示.

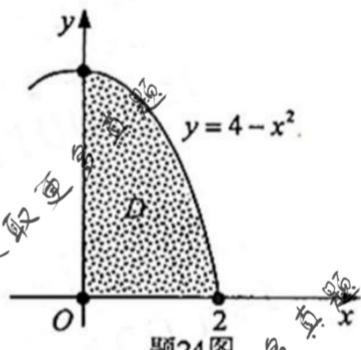


题23图

24. (本小题 7 分)

设由抛物线 $y = 4 - x^2$ ($x \geq 0$) 与两个坐标轴所围成的平面图形为 D , 如图所示. 求:

- (1) D 的面积 A ;
- (2) D 绕 x 轴一周的旋转体体积 V_x .



题24图

2020 年 10 月高等教育自学考试全国统一命题考试
高等数学（一）试题答案及评分参考
 （课程代码 00020）

一、单项选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. C | 2. B | 3. A | 4. A | 5. C |
| 6. A | 7. D | 8. B | 9. C | 10. D |

二、简单计算题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. 解：要使函数有意义，须有 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 2 分
 则函数的定义域为 $[-1, 1]$ 4 分
12. 解：原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} [(1+4x)^{\frac{1}{4x}}]^{-4}$ 3 分
 $= e^{-4}$ 4 分
13. 解：因 $y' = 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x = x^2(3 \tan x + x \sec^2 x)$ ， 3 分
 故 $dy = x^2(3 \tan x + x \sec^2 x)dx$ 4 分
14. 解：设切点为 (x_0, y_0) .
 由已知，切线斜率 $y'|_{x=x_0} = 2x_0 + 2 = 4$ ，得 $x_0 = 1$ 2 分
 故切点为 $(1, 6)$ ，则所求切线方程为 $y - 6 = 4(x - 1)$ ，
 即 $y = 4x + 2$ 4 分
15. 解：由洛必达法则，原极限 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 2} 2x(x-1)$ 3 分
 $= 4$ 4 分

三、计算题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

16. 解：欲使函数连续，须
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 6 + a$ ， 2 分
 则 $6 + a = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ ，故 $a = -5$ 5 分

17. 解: $\frac{dy}{dx} = (e^x + x^2)' f'(e^x + x^2)$ 3 分

$$= (e^x + 2x) f'(e^x + x^2).$$
 5 分

18. 解: $f'(x) = 4x(1-x)(1+x)$, 令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 0, x = \pm 1$ 2 分

$$f''(x) = 4 - 12x^2, \text{ 又 } f''(\pm 1) = -8 < 0, f''(0) = 4 > 0.$$

故函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(\pm 1) = 1$, 极小值为 $f(0) = 0$ 5 分

19. 解: 分离变量得 $\frac{1}{y^2} dy = 4x dx$, 2 分

两边积分, 得通解 $\frac{1}{y} = 2x^2 + C$, 或 $y = \frac{1}{2x^2 + C}$ 5 分

20. 解: 设 $F(x, y, z) = yz^2 - xz^3 - 1$.

则 $F'_x = -z^3, F'_y = z^2, F'_z = 2yz - 3xz^2$, 3 分

故 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{z^2}{2y - 3xz}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z}{2y - 3xz}$ 5 分

四、综合题: 本大题共 4 小题, 共 25 分。

21. (本小题 6 分)

解: 由已知 $p = 10 - 3Q$, 收益函数 $R(Q) = pQ = 10Q - 3Q^2$,

成本函数 $C(Q) = Q^2$, 利润函数 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = 10Q - 4Q^2$ 3 分

$L'(Q) = 10 - 8Q$, 令 $L'(Q) = 0$ 得唯一驻点 $Q = \frac{5}{4}$.

又 $L''(Q) = -8 < 0$, 所以当 $Q = \frac{5}{4}$ (吨) 时, 利润最大,

最大利润为 $L\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{4}$ (万元). 6 分

(注: 若用“由问题的实际意义知最值存在且驻点唯一”论述最值亦可)

22. (本小题 6 分)

解: 令 $\sqrt{x} = t$, 则

$$I = 2 \int_0^x t \cos t dt$$
 3 分

$$= 2 \int_0^x t d(\sin t) = 2(t \sin t|_0^x + \cos t|_0^x) = -4.$$
 6 分

23. (本小题 6 分)

$$\text{解: } I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+2y) dy \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \int_0^1 (xy + y^2) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

24. (本小题 7 分)

$$\text{解: (1) } A = \int_0^2 (4-x^2) dx = \frac{16}{3}; \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) V_x = \pi \int_0^2 (4-x^2)^2 dx \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= \pi \int_0^2 (16-8x^2+x^4) dx = \frac{256}{15}\pi. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$