

# D003 · 00020(通卡)

绝密★启用前

2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

## 高等数学(一)

(课程代码 00020)

(不允许使用计算器)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分,第一部分为选择题,第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答,答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔,书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

### 第一部分 选择题

一、单项选择题:本大题共10小题,每小题3分,共30分。在每小题列出的备选项中只有一项是符合题目要求的,请将其选出。

1. 不等式  $x^2 - 2x - 8 < 0$  的解集为  
A.  $(-\infty, -2)$       B.  $(-2, 4)$       C.  $(-4, 2)$       D.  $(2, +\infty)$
2. 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 3^x, & x > 0 \end{cases}$  的定义域为  
A.  $[0, +\infty)$       B.  $(-\infty, 0]$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $(-\infty, +\infty)$
3. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{-x}$  等于  
A.  $e^{-2}$       B.  $e^{-1}$       C.  $e$       D.  $e^2$
4. 已知  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \cos 2x$  是与  $ax^2$  等价的无穷小量,则  $a =$   
A.  $-2$       B.  $-1$       C.  $1$       D.  $2$
5. 在  $x = 0$  处可导的函数是  
A.  $\sqrt{x}$       B.  $\sqrt{x^2}$       C.  $x^2$       D.  $|x|$
6. 微分  $d(\sin^2 x) =$   
A.  $\sin 2x$       B.  $2\sin x$       C.  $\sin 2x dx$       D.  $2\sin x dx$

7. 曲线  $y = \frac{4x}{x^2 - 2x + 1}$  的水平渐近线为
- A.  $y=0$       B.  $y=1$       C.  $x=0$       D.  $x=1$
8. 曲线  $y = 2x^3 - 6x + 11$
- A. 没有拐点      B. 有一个拐点  
C. 有二个拐点      D. 有三个拐点
9. 若无穷限反常积分  $\int_0^{\infty} k e^{-3x} dx = 1$ , 则常数  $k =$
- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3
10. 设函数  $z = \arctan(xy)$ , 则全微分  $dz =$
- A.  $\frac{dx+dy}{4}$       B.  $\frac{dx+dy}{3}$       C.  $\frac{dx+dy}{2}$       D.  $dx+dy$

公众号搜索: hifudao666,

公众号搜索: hifudao666,

公众号搜索: hifudao666,

## 第二部分 非选择题

二、简单计算题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. 求函数  $y=1+\ln(x+2)$  的反函数.

12. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x + x^2}$ .

13. 设函数  $y = \ln \sqrt{1-2x}$ , 求导数  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ .

14. 求函数  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7$  在闭区间  $[0, 2]$  上的最值.

15. 求不定积分  $\int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ .

三、计算题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

16. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{4x}-1}{x(x+1)}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ , 讨论  $f(x)$  在  $x=0$  处的连续性.

17. 已知函数  $y = \cos(5+2e^x)$ , 求  $y''$ .

18. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ .

19. 计算定积分  $I = \int_0^1 (6 \cos x - xe^x) dx$ .

20. 求微分方程  $xy' = y \ln x$  的通解.

四、综合题：本大题共 4 小题，共 25 分。

21. (本小题 6 分)

设某工厂生产某种产品  $q$  公斤时销售收入为  $R(q) = 6\sqrt{q}$  (万元), 成本函数为

$C(q) = \frac{1}{18}q^2 + 1$  (万元), 且产销平衡. 问产量  $q$  为多少时总利润最大? 并求最大利润.

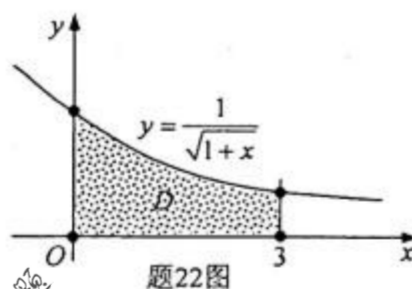
22. (本小题 6 分)

设曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  与直线  $x = 3$  及两坐标轴围

成的平面图形为  $D$ , 如图所示. 求:

(1)  $D$  的面积  $A$ ;

(2)  $D$  绕  $x$  轴一周的旋转体体积  $V_x$ .



23. (本小题 6 分)

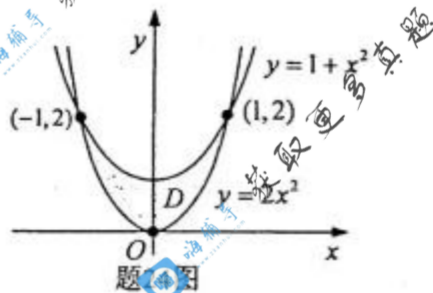
设  $z = z(x, y)$  是由方程  $z - xy + e^z \sin(x+y) = 2$  所确定的隐函数, 求偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

24. (本小题 7 分)

计算二重积分  $I = \iint_D x^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由

曲线  $y = 1 + x^2$  与  $y = 2x^2$  所围成的平面区域,

如图所示.



# 2021年4月高等教育自学考试全国统一命题考试 高等数学（一）试题答案及评分参考

（课程代码 00020）

一、单项选择题：本大题共10小题，每小题3分，共30分。

1. B      2. D      3. A      4. D      5. C  
6. C      7. A      8. B      9. D      10. C

二、简单计算题：本大题共5小题，每小题4分，共20分。

11. 解：因  $y = 1 + \ln(x+2)$ ，所以  $x = e^{y-1} - 2$ . .....3分

故该函数的反函数为  $y = e^{x-1} - 2$ . .....4分

12. 解：原极限  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{2+x}$  .....2分

$= 1$ . .....4分

13. 解：因  $\frac{dy}{dx} = \left[ \frac{1}{2} \ln(1-2x) \right]' = \frac{1}{2x-1}$ , .....3分

所以  $\frac{dy}{dx} = -1$ . .....4分

14. 解：  $f'(x) = 12x(x-1)$ , .....2分

令  $f'(x) = 0$ ，得  $f(x)$  在区间  $(0, 2)$  内的驻点  $x=1$ . .....2分

比较函数值  $f(0) = 7$ ， $f(1) = 5$ ， $f(2) = 15$ ，

得  $f_{\min} = f(1) = 5$ . .....4分

15. 解：原积分  $= \int \left( 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$  .....2分

$= x + \arctan x + C$ . .....4分

三、计算题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

16. 解：因  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x(x+1)} = 4$ , .....3 分

又  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4 \neq f(0) = 3$ ，所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不连续。 .....5 分

17. 解：  $y' = -2e^x \sin(5 + 2e^x)$ , .....3 分

$y'' = -2e^x \sin(5 + 2e^x) - 4e^{2x} \cos(5 + 2e^x)$ . .....5 分

18. 解：由洛必达法则，原极限  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2}$  .....3 分

$= \frac{1}{3}$  .....5 分

19. 解：  $I = \sin 1 - \int_0^1 xe^x dx$ , .....2 分

$= \sin 1 - (x - e^{-x}) \Big|_0^1 = \sin 1 - 1$ . .....5 分

20. 解：分离变量  $\frac{1}{y} dy = \frac{\ln x}{x} dx$ , .....2 分

两端积分得通解  $\ln|y| = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ . .....5 分

四、综合题：本大题共 4 小题，共 25 分。

21. (本小题 6 分)

解：总利润函数  $L(q) = R(q) - C(q) = 6\sqrt{q} - \frac{1}{18}q^2 - 1$ . .....2 分

令  $L'(q) = R'(q) - C'(q) = \frac{3}{\sqrt{q}} - \frac{q}{9} = 0$ ，得唯一驻点  $q = 9$ . .....4 分

又因为  $L''(q) = -\frac{3}{2}q^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{9} < 0$ ，所以  $q = 9$  为  $L(q)$  的最大值点。

故当产量  $q = 9$  公斤时，总利润最大，最大利润为  $L(9) = \frac{25}{2}$  万元。 .....6 分

(注：若用“由问题的实际意义知最值存在且驻点唯一”论述最值亦可)



22. (本小题 6 分)

解: (1)  $A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2.$  .....3 分

(2)  $V_x = \pi \int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = \pi \ln 4.$  .....6 分

23. (本小题 6 分)

解: 设  $F(x, y, z) = z - xy + e^z \sin(x+y) - 2.$  .....1 分

则  $F'_x = -y + e^z \cos(x+y), F'_y = -x + e^z \cos(x+y),$

$F'_z = 1 + e^z \sin(x+y)$  .....4 分

于是  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y - e^z \cos(x+y)}{1 + e^z \sin(x+y)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{x - e^z \cos(x+y)}{1 + e^z \sin(x+y)}$  .....6 分

24. (本小题 7 分)

解:  $I = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^{1+x^2} x^2 dy$  .....3 分

$= 2 \int_0^1 x^2 (1 - x^2) dx$  .....5 分

$= \frac{4}{15}$  .....7 分